SINIRSIZ OPERATÖR KATSAYILI BİR DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN SPEKTRUMU VE ÖZDEĞERLERİNİN SAYISININ ASİMTOTİK DAVRANIŞI

Erdoğan Şen
Namık Kemal Üniversitesi, Tekirdağ

ABSTRACT

In this study, we investigate the asymptotic behaviour of number of eigenvalues and asymptotic behaviour of eigenvalues for a second order differential operator with unbounded operator coefficient and with semi-periodic boundary conditions. In this work, the problem that we consider is different from other related works by appearance of semi-periodic boundary conditions and an unbounded operator. It is of interest to know whether the formulas obtained for the spectrum of second order self-adjoint differential operators in previous studies is still true even if the boundary conditions are semi-periodic.

ÖZET

Biz bu çalışmada yarı-periyodik sınır koşullarına sahip ikinci mertebeden bir diferansiyel operatör için özdeğerlerin ve özdeğerlerin sayısının asimptotik davranışını inceleyeceğiz. İncelediğimiz problem yarı-periyodik sınır koşulları ve sınırsız operatör içermesi bakımından konuyla ilgili diğer çalışmalardan farklıdır. Dolayısıyla daha önce ikinci mertebeden kendine eş diferansiyel operatörlerin spektrumu için elde edilen sonuçların sınır koşulları yarı-periyodik olduğunda da geçerli olup olmadığı sorusu araştırılması gereken bir problemdir.

GİRİŞ

Kostyuchenko ve Levitan 1967 yılında $-y''(x)+Q(x)y(x),\ x\in(-\infty,\infty)$ şeklindeki bir diferansiyel operatörün spektrumunu incelemiş ve özdeğerlerinin sayısı için bir formül bulmuştur [1]. Daha sonra Gorbachuk ve Gorbachuk potansiyel operatöre sahip bir sınır-değer probleminin (SDP) spektrumunu incelemiş ve özdeğerlerin sayısı için bir asimtotik ifade elde etmiştir [2]. Mikhailets değişken operatör katsayılı bir SDP için özdeğerlerin ve özdeğerlerin sayısının asimtotik davranışını incelemiştir [3]. Adıgüzelov ve Sezer ise sınırsız operatör katsayılı kendine eş bir diferansiyel operatöre sahip bir SDP için özdeğerlerin ve özdeğerlerin sayısının asimptotik davranışını araştırmıştır [4]. Bayramoglu ve Aslanova sınır koşullarından birinde özdeğer parametresi bulunan bir SDP'nin spektrumunu incelemiştir [5]. Bayramov vd. ise yarı-periyodik sınır koşullarına sahip sınırlı operatör katsayılı bir diferansiyel operatörün özdeğerlerinin düzenlenmiş toplamı için bir formül elde etmiştir [6]. Daha kapsamlı bir literatür özeti için [7] ve [8] makalelerine bakılabilir.

H ayrılabilir bir Hilbert uzayı ve $H_1=L_2\left(H;[0,\pi]\right)$, H 'daki tüm kuvvetli ölçülebilir f fonksiyonlarının

$$\int_0^{\pi} \| f(t) \|_H^2 \, dt < \infty$$

olacak şekilde bir kümesi olsun. Bu çalışmada H 'da iç çarpımı "$(\cdot,\cdot)$" ve H 'da normu "$\|\cdot\|$" ile göstereceğiz.

H_1 uzayında

$$l_0[y] = -y''(t) + Ay(t),$$

ile tanımlı l_0 diferansiyel ifadesini göz önüne alalım. Burada $A : \Omega(A) \to H$ operatörü $E : H \to H$ birim operatör olmak üzere $A = A^* \geq E$ olacak şekilde kendine eş bir operatördür ve $\sigma_\infty(H)$, H 'dan H 'a tüm kompakt operatörlerin kümesini göstermek üzere $A^{-1} \in \sigma_\infty(H)$ 'dir.

A 'nın özdeğerleri $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq ... \leq \gamma_n \leq ...$ olsun. Burada her özdeğer katlılığı kadar yazılmıştır.

$\Omega(L_0')$ kümesi H_1 uzayında aşağıdaki koşulları sağlayan $u(t)$ fonksiyonlarının kümesi olsun:

a) $u(t)$, $[0,\pi]$ aralığında ikinci mertebeden sürekli türeve sahiptir.

b) Her $t \in [0,\pi]$ için $u(t) \in \Omega(A)$ ve $Au(t)$, H 'daki norma göre süreklidir.

c) $y(0) = -y(\pi), \quad y'(0) = -y'(\pi).$

Burada $\overline{\Omega(L_0')} = H_1$ ve H_1 ayrılabilir bir Hilbert uzayıdır [9].

$\Omega(L_0)$ 'dan H_1 'e $L_0' u = l_0 u$ operatörünü göz önüne alalım. L_0' 'ın özdeğerleri $(2m-1)^2 + \gamma_j$, $(j = 1,2,...; m = 1,2,...)$ şeklindedir. L_0' kapalı ve simetrik bir operatördür. Dolayısıyla $L_0 = \overline{L_0'}$ olarak tanımlayabiliriz.

$Q(t)$ ise aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyon olsun:

i) Her $t \in [0,\pi]$ için $Q(t): H \to H$ kendine eş bir operatördür.

ii) $Q(t)$, $[0,\pi]$ 'de zayıf ölçülebilirdir.

iii) $\|Q(t)\|$, $[0,\pi]$ aralığında sınırlıdır.

İşte biz bu çalışmada L_0 ve $L = L_0 + Q$ operatörlerinin spektrumunu ve özdeğerlerinin sayısının asimptotik davranışını inceleyeceğiz. İncelediğimiz problem yarı-periyodik sınır koşulları içermesi bakımından [4] çalışmasından farklıdır. Dolayasıyla [4]'de spektrum için elde edilen sonuçların, problemin sınır koşulları yarı-periyodik olduğunda da geçerli olup olmadığı sorusu araştırılması gereken bir problemdir.

L ve L0 OPERATÖRLERİNİN SPEKTRUMU

L_0 ve L operatörleri saf, ayrık spektruma sahiptirler [10]. Uygunluk için L_0 ve L operatörlerinin özdeğerlerini sırasıyla $\mu_1 \leq \mu_2 \leq ... \leq \mu_n \leq ...$ ve $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n \leq ...$ ile gösterelim. $N(\mu)$ ile de L_0 operatörünün bir μ özdeğerinden büyük olmayan özdeğerlerin sayısını gösterelim. Yani $N(\mu) = \sum\limits_{\mu_n \leq \mu} 1$ olsun.

Teorem. Eğer $\gamma_j = aj^\alpha \ (a > 0, \alpha > 2)$ ise o halde

$$N(\mu) \sim d\mu^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}$$

dır. Burada,

$$d=\frac{1}{\alpha a^{\frac{1}{\alpha}}}\int_0^{\arcsin\sqrt{1-\frac{1}{\mu}}}(\sin\tau)^{\frac{2}{\alpha}-1}\cos^2\tau d\tau.$$

İspat. Açıktır ki $N(\mu)$,

$$aj^{\alpha}+(2m-1)^2\le\mu\quad(j=1,2,...;m=1,2,...).$$

eşitsizliğini sağlayan (j,m) ikililerinin sayısıdır. Geometrik bir bakış açısıyla, $N(\mu)$ düzlemde birinci bölgede $ax^{\alpha}+(2y-1)^2=\mu$ eğrisiyle sınırlanan kapalı alanda koordinatları tamsayı olan noktaların sayısıdır. Dolayısıyla,

$$N(\mu)\le\left(\frac{\mu-1}{a}\right)^{\frac{1}{\alpha}}+\int_0^{\left(\frac{\mu-1}{a}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{\left(\mu-ax^{\alpha}\right)^{1/2}+1}{2}dx$$

elde edilir. D_{μ}, (x,y)-düzleminin $x=0,\ y=0$ doğruları ve $a(x+1)^{\alpha}+(2y)^2=\mu$ eğrisiyle sınırlı kapalı alt kümesi olsun. Dolayısıyla D_{μ}'nin alanı $N(\mu)$'den büyük olamaz. Yani,

$$N(\mu)\ge\frac{1}{2}\int_0^{\left(\frac{\mu}{a}\right)^{\frac{1}{\alpha}}-1}\sqrt{\mu-a(x+1)^{\alpha}}dx.$$

Bu son iki eşitsizlikten $b=\int_0^{\arcsin\sqrt{\frac{\mu-1}{\mu}}}(\sin\tau)^{\frac{2}{\alpha}-1}\cos^2\tau d\tau$ olmak üzere

$$\frac{b\mu^{\frac{\alpha+2}{2\alpha}}}{\alpha a^{\frac{1}{\alpha}}}\left[1-\frac{\alpha a^{\frac{1}{\alpha}}}{2b\mu^{\frac{1}{\alpha}}}\right]\le N(\mu)\le\frac{b\mu^{\frac{\alpha+2}{2\alpha}}}{\alpha a^{\frac{1}{\alpha}}}\left[1+\frac{3\alpha}{2b\sqrt{\mu}}\left(1-\frac{1}{\mu}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]$$

ve

$$N(\mu)\sim\frac{b\mu^{\frac{\alpha+2}{2\alpha}}}{\alpha a^{\frac{1}{\alpha}}}$$

elde edilir.

Teorem. Eğer $\gamma_j\sim aj^{\alpha}\ (a>0,\alpha>2)$ ise o halde

$$d=\frac{1}{\alpha a^{\frac{1}{\alpha}}}\int_0^{\arcsin\sqrt{1-\frac{1}{\mu}}}(\sin\tau)^{\frac{2}{\alpha}-1}\cos^2\tau d\tau.$$

olmak üzere

$$N(\mu)\sim d\mu^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}.$$

İspat.

$\gamma_j^{(1)}=\begin{cases}\gamma_j, & j\le M,\\ (1-\varepsilon)aj^{\alpha}, & j>M\end{cases}$ ve $\gamma_j^{(2)}=\begin{cases}\gamma_j, & j\le M,\\ (1+\varepsilon)aj^{\alpha}, & j>M\end{cases}$ olarak tanımlansın. $N_1(\mu),N_2(\mu),N_3(\mu),N_4(\mu),N_5(\mu),N_6(\mu)$ ve $N_7(\mu)$ sırasıyla aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayan (j,m) ikililerinin sayısını göstersin:

$$\begin{aligned}
&\gamma_j^{(1)} + (2m-1)^2 \le \mu, && (j=1,2,...; m=1,2,...)\\
&\gamma_j^{(2)} + (2m-1)^2 \le \mu, && (j=1,2,...; m=1,2,...)\\
&\gamma_j + (2m-1)^2 \le \mu, && (j=1,2,...,K; m=1,2,...)\\
&(1-\varepsilon)aj^{\alpha} + (2m-1)^2 \le \mu, && (j=1,2,...; m=1,2,...)\\
&(1+\varepsilon)aj^{\alpha} + (2m-1)^2 \le \mu, && (j=1,2,...; m=1,2,...)\\
&(1+\varepsilon)aj^{\alpha} + (2m-1)^2 \le \mu, && (j=1,2,...,K; m=1,2,...)\\
&(1+\varepsilon)aj^{\alpha} + (2m-1)^2 \le \mu, && (j=K+1,K+2,...; m=1,2,...).
\end{aligned}$$

[4]'ü takip ederek

$$N_2(\mu) \le N(\mu) \le N_1(\mu),$$
$$N_1(\mu) \le N_3(\mu) + N_4(\mu),$$
$$N_3(\mu) \le 2K\sqrt{\mu},$$
$$N_4(\mu) \le \left[\frac{\mu-1}{a(1-\varepsilon)}\right]^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{b\mu^{\frac{\alpha+2}{2\alpha}}}{\alpha\left[a(1-\varepsilon)\right]^{\frac{1}{\alpha}}}$$

eşitsizliklerini ve bunlardan da

$$N(\mu) \le \left[\frac{\mu-1}{a(1-\varepsilon)}\right]^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{b\mu^{\frac{\alpha+2}{2\alpha}}}{\alpha\left[a(1-\varepsilon)\right]^{\frac{1}{\alpha}}} + 2K\sqrt{\mu}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Diğer taraftan,

$$N_2(\mu) = N_3(\mu) + N_7(\mu) \ge N_7(\mu) = N_5(\mu) - N_6(\mu)\ ,$$
$$N_6(\mu) \le 2K\sqrt{\mu}$$

ve

$$N_5(\mu) \ge \frac{b\mu^{\frac{\alpha+2}{2\alpha}}}{\alpha\left[a(1+\varepsilon)\right]^{\frac{1}{\alpha}}} - \left(2K + \frac{3}{2}\right)\sqrt{\mu}$$

olduğundan

$$N(\mu) \sim \frac{b\mu^{\frac{\alpha+2}{2\alpha}}}{\alpha a^{\frac{1}{\alpha}}}$$

elde edilir.

Teorem. Eğer $\gamma_j \sim aj^{\alpha}$ $\quad (0 < a, \alpha < \infty)$ ise, o halde

$$\lambda_n \sim d_0 n^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}} \quad \left(d_0 = d^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}\right).$$

Burada

$$d = \frac{1}{\alpha a^{1/\alpha}} \int_0^{\arcsin\sqrt{1-\frac{1}{\lambda}}} (\sin\tau)^{\frac{2}{\alpha}-1} \cos^2\tau d\tau.$$

İspat. L_0 operatörünün bir μ_n özdeğerinin katlılığı p_n olsun. O halde

$$\mu_{q_n} < \mu_{q_n+1} = \mu_{q_n+2} = ... = \mu_{q_n+p_n} = \mu_n < \mu_{q_n+p_n+1} \qquad (1)$$

ve

$$q_n + 1 \le n \le q_n + p_n \tag{2}$$

olacak şekilde bir q_n vardır. Aşikar olarak $N(\mu_n) = q_n + p_n \sim c\mu_n^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}$. Burada $c = \frac{2b}{\alpha a^{\frac{1}{\alpha}}}$. Bununla birlikte bir μ_n özdeğerinin bir p_n katlılığı $\gamma_j + (2m-1)^2 = \mu_n \quad (j = 1, 2, ...; m = 1, 2, ...)$ eşitliğini sağlayan (j, m) $(j = 1, 2, ...; m = 1, 2, ...)$ ikililerinin sayısı olduğundan

$$p_n < \sqrt{\mu_n} + 1 \le 2\sqrt{\mu_n}. \tag{3}$$

Böylece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{\mu_n^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}} = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla (1), (2) ve (3)'ten

$$\frac{q_n + 1}{c\mu_n^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}} \le \frac{n}{c\mu_n^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}} \le \frac{q_n + p_n}{c\mu_n^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}} = \frac{N(\mu_n)}{c\mu_n^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}}$$

elde edilir. Bu da bize

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{c\mu_n^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}} = 1$$

eşitliğini verir. Yani

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{\left(c^{-1}n\right)^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}} = 1.$$

Sonuç olarak,

$$\mu_n \sim d_0 n^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}} \quad \left(d_0 = d^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}\right).$$

Q, H_1'den H_1'e kendine eş bir operatör olduğundan her $y \in H_1$ için

$$\left|(Qy, y)_{H_1}\right| \le \|Qy\|_{H_1} \|y\|_{H_1} \le \|Q\|_{H_1} \|y\|_{H_1}^2$$

veya

$$\left(-\|Q\| y, y\right)_{H_1} \le (Qy, y)_{H_1} \le \left(\|Q\| y, y\right)_{H_1}$$

elde edilir. Bu da bize

$$-\|Q\|_{H_1} E \le Q \le \|Q\|_{H_1} E$$

eşitsizliğini verir. Böylece,

$$L_0 - \|Q\|_{H_1} E \le L = L_0 + Q \le L_0 + \|Q\|_{H_1} E.$$

[10]'dan şunu biliyoruz:

$$\mu_n - \|Q\|_{H_1} \le \lambda_n \le \mu_n + \|Q\|_{H_1}.$$

Buradan,

$$1 - \frac{\|Q\|_{H_1}}{\mu_n} \le \frac{\lambda_n}{\mu_n} \le 1 + \frac{\|Q\|_{H_1}}{\mu_n}.$$

Bu eşitsizliğin her iki tarafında limite geçersek

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{\mu_n}=1$$

bulunur. Böylece

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{d_0 n^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{\mu_n}\frac{\mu_n}{d_0 n^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{\mu_n}\lim_{n\to\infty}\frac{\mu_n}{d_0 n^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}}=1$$

veya $n\to\infty$ için

$$\lambda_n \sim d_0 n^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}$$

elde edilir.

SONUÇLAR

Elde edilen sonuçlar özdeğerlerin yaklaşık olarak hesaplanmasında, L ve L_0 operatörlerinin özdeğerlerinin düzenlenmiş toplamları için elde edilecek eşitliklerde yani yarı-periyodik sınır koşullarına sahip sınırsız operatör katsayılı kendine eş ikinci mertebeden diferansiyel operatörlerin izlerinin (trace) hesaplanmasında kullanılabilecektir.

KAYNAKLAR

[1] A.G. Kostyuchenko, B.M. Levitan, Asymptotic behavior of the eigenvalues of the Sturm – Liouville operator problem, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* 1 (1) (1967) 86–96.

[2] V.I. Gorbachuk, M.L. Gorbachuk, Classes of boundary value problems for the Sturm-Liouville equation with an operator potential, *Ukrainian Mathematical Journal*. 24 (3) (1972) 291-305.

[3] V.A. Mikhailets, Asymptotics of the eigenvalues of a Sturm–Liouville equation with variable operator coefficients, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* 11 (1) (1977) 71–72.

[4] E. Adıgüzelov, Y. Sezer, On spektrum of a self adjoint differential operator of higher order with unbounded operator coefficient and asymptotic behaviour of eigenvalues, *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*. 4 (2006) 32-48.

[5] M. Bayramoglu, N.M. Aslanova, Distribution of eigenvalues and trace formula for the Sturm-Liouville operator equation, *Ukrainian Mathematical Journal*. 62 (7) (2010) 1005-1017.

[6] A. Bayramov, Z. Oer, O. Baykal, On identity for eigenvalues of second order differential operator equation, *Mathematical and Computer Modelling*. 49 (2009) 403-412.

[7] M. Bayramoglu, E. Adıgüzelov, Regularized traces of differential operators, *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*. 1 (2005) 1-22.

[8] C.T. Fulton and S.A. Pruess, Eigenvalue and eigenfunction asymptotics for regular Sturm-Liouville problems, *J. Math. Anal. Appl.* 188 (1994) 297-340.

[9] A.A. Kirillov, *Elements of the Theory of Representations*, Springer of Verlag, New York, 1976.

[10] V.I. Smirnov, *A Course of Higher Mathematics*, Volume 5, Pergamon Press, New York, 1964.